

Quelques problèmes à l'interface Géométrie-Mécanique

Jean LERBET

Institut Navier, LAMI, Ecole Nationale des
Ponts et Chaussées
EPU Tours, DP
lerbet@univ-tours.fr

Plan de l'exposé

- I Introduction
- II Groupes de Lie et cinématique des systèmes
- III Groupes de Lie et génération automatique des équations de la dynamique
- IV Stabilité sous chargement non conservatif
- V Conclusion

I Introduction

- Singularités des chaînes cinématiques
- Génération automatique des équations de la dynamique
- Stabilité des systèmes: stabilités statique et dynamique



- Théorie des groupes de Lie
- Théorie des singularités d'applications
- Systèmes dynamiques et géométrie (symplectique, riemannienne, ...)

II Groupes de Lie et cinématique des systèmes

- cinématique $\xRightarrow{\text{dualité}}$ dynamique

- espace des configurations d'un solide



espace homogène S sans point fixe opéré
par \mathbb{D} (groupe de Lie)



calcul différentiel intrinsèque dans S ou
dans \mathbb{D} (aspects lagrangien ou eulérien)



formation des objets de la mécanique
(déplacements, vitesses, accélérations,
déformations, . . .) sans introduire de
repères, des bases ou des coordonnées

Généralisation aux systèmes (liaison \Leftrightarrow sous-groupe de \mathbb{D})



chaîne cinématique \Leftrightarrow famille (X_1, \dots, X_n) de vecteurs de l'algèbre de Lie



configuration quelconque \Leftrightarrow famille $Y_1(q), \dots, Y_n(q)$ telle que pour tout $k = 1, \dots, n$:

$$Y_k(q) = Ad(\exp(q_1) \circ \dots \circ \exp(q_k))X_k$$



configuration singulière $\Leftrightarrow q = (q_1, \dots, q_n)$ tel que rang $(Y_1(q), \dots, Y_n(q))$ non maximal

Ce qui a été fait: théorie des mécanismes

- Etude de $V = \{q \mid \exp(q_1 X_1) \circ \dots \circ \exp(q_n X_n) = id\}$
- Théorie des singularités d'applications différentiables



- Théorèmes de transversalité
- Géométrie analytique: calcul du cone tangent $C_0 V$ à une singularité (en 0):

$$\sum_{k=1}^n x_k X_k = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{l < k} x_k x_l [X_l, X_k] \in F$$

linéaire (espace vectoriel) \rightarrow non linéaire (algèbre de Lie)

- Classification exhaustive des singularités

Bilan

Calcul dans un groupe de Lie + Théorie des singularités



résolution d'un vieux problème (100 ans)

Problèmes ouverts types

- Classification des singularités des robots parallèles



intersections de singularités

- Prise en compte des jeux dans les liaisons



déformation de singularités

III Groupes de Lie et génération automatique des équations

calcul intrinsèque des objets de la cinématique

dualité \Downarrow (comoment)

efforts: vecteurs du dual de l'algèbre de Lie,
inertie: opérateur de l'algèbre de Lie

\Downarrow

écriture intrinsèque et explicite des équations de la dynamique

+

repères de l'espace \Leftrightarrow bases de l'alg. de Lie

\Downarrow

calcul matriciel \rightarrow calcul formel

\Downarrow

génération automatique des équations (et même traitement numérique)

Ce qui a été fait: milieux curvilignes

- Modèle général $(\sigma, t) \mapsto D(\sigma, t)$
- équations intrinsèques

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^c &= \rho H_r(\dot{v}^c) + [v^c, \rho H_r(v^c)] \\ &\quad - [e^c, \Theta^c] - \frac{\partial \Theta^c}{\partial \sigma} \\ \mathcal{T}_0^c &= \Theta^c(0) \quad , \quad \mathcal{T}_l^c = -\Theta^c(l) \end{aligned}$$

- algèbre de dimension 6 \Rightarrow 6 EDP incalculables à la main

Bilan

Calcul dans un groupe de Lie



écriture des équations intrinsèques et
explicites (1 par solide ou PPV)

Quelques voies possibles

- logiciel intelligent de génération des équations des systèmes \Rightarrow utiliser les règles de calcul et de simplification dans les algèbres de Lie
- intégration numérique des non-linéarités \Rightarrow formule de Campbell-Hausdorff

III Stabilité sous chargement non conservatif

- Structure Linéaire Elastique
- Efforts quelconques, λ paramètre de chargement
- Dimension finie



$$M\ddot{X} + K(\lambda)X = 0$$

M symétrique > 0 , $K(\lambda)$ quelconque

⇒ Stabilité de la position 0 ?

Bilan

1) cas conservatif ($K(\lambda)$ symétrique)

critère statique: stabilité si $\det(K(\lambda)) > 0$

critère dynamique: (faible) stabilité si racines de $\det(-\omega^2 M + K(\lambda)) = 0$ réelles > 0



si le système est conservatif ($K(\lambda)$ symétrique), les deux critères coïncident et l'instabilité est obtenue pour $\det(K(\lambda)) = 0$



Trois conséquences cruciales

- critère indépendant de la répartition de masse
- stabilité de la structure \rightarrow stabilité de toute sous-structure
- dissipation \rightarrow stabilité de la structure

2) cas non conservatif (dissipatif ou pas)
linéaire



analyse spectrale → critère de
Routh-Hurwitz

- critère dépendant de la répartition de masse
- stabilité de la structure \nrightarrow stabilité de toute sous-structure
- dissipation \nrightarrow stabilité de la structure



critère dynamique meilleure que critère sta-
tique

3) non linéarité

- systèmes dynamiques
- géométrie symplectique

Un petit exemple simple: Force suiveuse

$\lambda = F$ et $K = K(\theta_1, \theta_2, F)$ avec

$$K = \begin{pmatrix} 2k - Fl \cos(\theta_2 - \theta_1) & -k + Fl \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$\det(K(\theta_1, \theta_2, F)) = k^2 > 0 \Rightarrow$ **échec** du critère statique

\Rightarrow structure statiquement stable $\forall F!$?



Instabilité dynamique

apparition de l'instabilité \Leftrightarrow fréquence double (flottement)

Influence de la répartition des masses

- (Bamberger) pour une distribution de masse uniforme: $\beta = 2.54$
- (Son, Ziegler) pour deux masses concentrées identiques m au milieu des deux barres:
 $\beta = 3$
- pour deux masses concentrées identiques m en A_1 et A_2 : $\beta = 2$

stabilité des sous-structures

cas $\theta_2 = 0$ l'instabilité statique \Leftrightarrow instabilité dynamique $\Rightarrow \beta = 2$



(masse répartie) $2 < \beta < 2.54$ structure stable
mais sous-structure instable!!!

proposition

Nouveau critère statique: la structure est statiquement stable si $K(\lambda)$ (non symétrique) définie positive (perturbation mixte de l'équilibre)



- plus d'échec du critère statique
- exemple force suiveuse: $F_s < F_d$
- pas de problème de stabilité (statique) de sous-structures
- lien partiel avec la stabilité dynamique:
 $K(\lambda)$ est définie positive → coefficients de $\det(xM + K(\lambda)) > 0$

Problèmes ouverts types

- géométrisation du concept de perturbation mixte
- lien critères statique et dynamique
- lien nouveau critère statique et non-linéaire
- perturbation antisymétrique d'un opérateur
- géométrisation des forces non conservatives: connexion avec torsion, . . . ?

IV Conclusion

- cinématique: théorie des singularités + groupes de Lie
- dynamique : calculs formel et numérique + groupes de Lie
- stabilité: géométrie, systèmes dynamiques + nouveau critère \Rightarrow partie symétrique K_s de K