
ANALYSE MULTIFRACTALE ET APPLICATION À UN MODÈLE D'UNIVERS EN EXPANSION

E. LEGUIERRIEC, B.N. MILLER, J.L. ROUET

... in progress ...

Analyse fractale et multifractale de données de simulations numériques d'un modèle d'univers en expansion

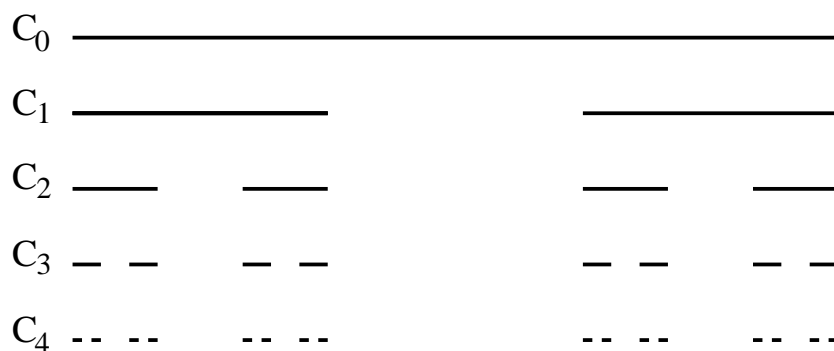
Sommaire

- Exemple d'évolution
 - Fractale et multifractals
 - Le modèle et simulations numériques
 - Analyse fractale des données et résultats
-

Fractales et Multifractales

Fractale : *objet auto-semblable à toute échelle*

Exemple : ensemble triadique de Cantor

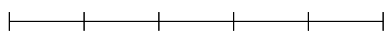


Après sa popularisation par Mandelbrot, on a vu des fractales partout :

- arbres, choux-fleurs,...
 - côtes de Bretagne, Norvège,....
 - cours de la bourse
 - répartition de la matière visible de l'univers.
-

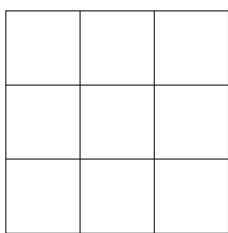
Dimension fractale

C'est une extension de la notion de dimension. Avec les objets habituels (segment unité, carré de surface 1 et cube de volume 1).



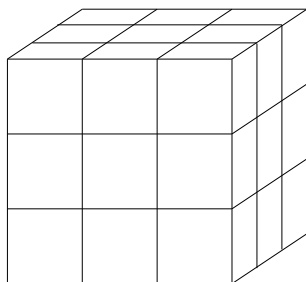
on divise le segment selon M parties dont chacune est auto-similaire au segment initial, le rapport d'échelle étant $r = 1/M^1$, on a

$$M r^1 = 1$$



on divise le carré selon M carrés dont chacun est auto-similaire au carré initial, le rapport d'échelle des longueurs étant $r = 1/M^{1/2}$, on a

$$M r^2 = 1$$



on divise le cube selon M cubes dont chacun est auto-similaire au cube initial, le rapport d'échelle des longueurs étant $r = 1/M^{1/3}$, on a

$$M r^3 = 1$$

Généralisation :

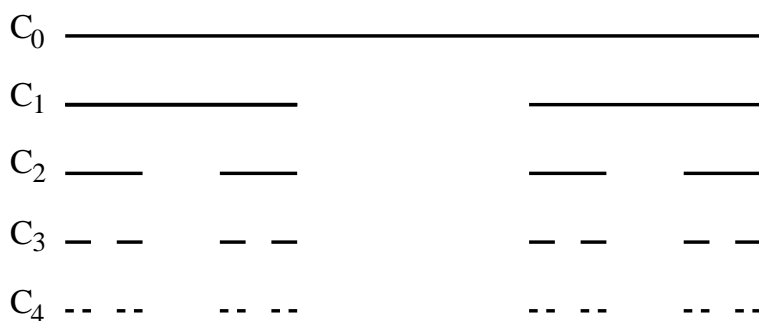
pour un fractal auto-semblable où M est le nombre de répliques auto-semblables ayant un rapport d'échelle r avec l'original on a

$$M r^D = 1$$

La valeur D est la dimension de Hausdorff avec

$$D = \frac{\log M}{\log 1/r}$$

Application à la poussière de Cantor :



$$M = 2, r = 1/3$$

$$D = \frac{\log M}{\log 1/r} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63$$

Méthode pratique : “Box Counting”

On compte le nombre $N(l)$ de segments de longueur l nécessaire pour recouvrir l’objet. On définit

$$D_0 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln 1/l}$$

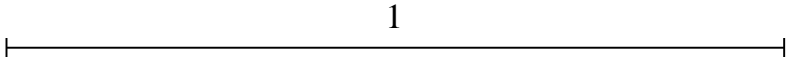
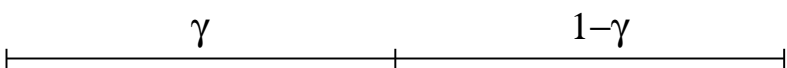
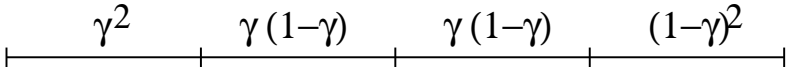
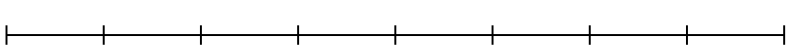
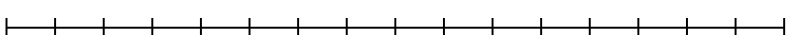
D_0 : “Box counting dimension” ou capacité de l’ensemble

Exemple : ensemble triadic de Cantor

	étape	l	N(l)
C_0	0	1	1
C_1	1	1/3	2
C_2	2	1/9	4
C_3	3	1/27	8
C_n	n	$1/3^n$	2^n

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = 0.63$$

Autre exemple : fractal multiplicatif
 (“binomial multiplicative process”)

	étape	1	N(1)
	0	1	1
	1	1/2	2
	2	1/4	4
	3	1/8	8
	n	1/2 ⁿ	2 ⁿ

$$0 < \gamma < .5$$

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 2^n} = 1$$

→ D_0 n'est pas suffisant pour décrire le fractal multiplicatif

Spectre Fractal

Pour tenir compte du poids de chaque cellule, on introduit :

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, l)}{\ln 1/l} \quad \text{avec} \quad I(q, l) = \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i^q$$

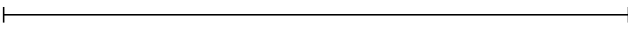


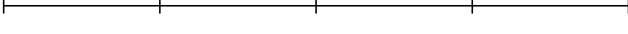
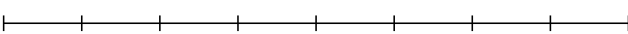
On introduit aussi $\tau_q = (1-q)D_q$ tel que

$$\tau_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, l)}{\ln 1/l} \quad \text{soit} \quad I(q, l) \sim l^{-\tau_q}$$

- $q = 0$ donne D_0

- $q = 1$ on a $D_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i \ln(\mu_i)$

Spectre fractal du fractal multiplicatif

	étape	1	N(l)					
	0	1	1					1
	1	1/2	2					1 1
	2	1/4	4					1 2 1
	3	1/8	8					1 3 3 1
	4	1/16	16					1 4 6 4 1

À l'étape n

$$\sum_{j=0}^n C_n^j \gamma^{n-j} (1-\gamma)^j = [\gamma + (1-\gamma)]^n = 1 \rightarrow \text{conservation de la masse}$$

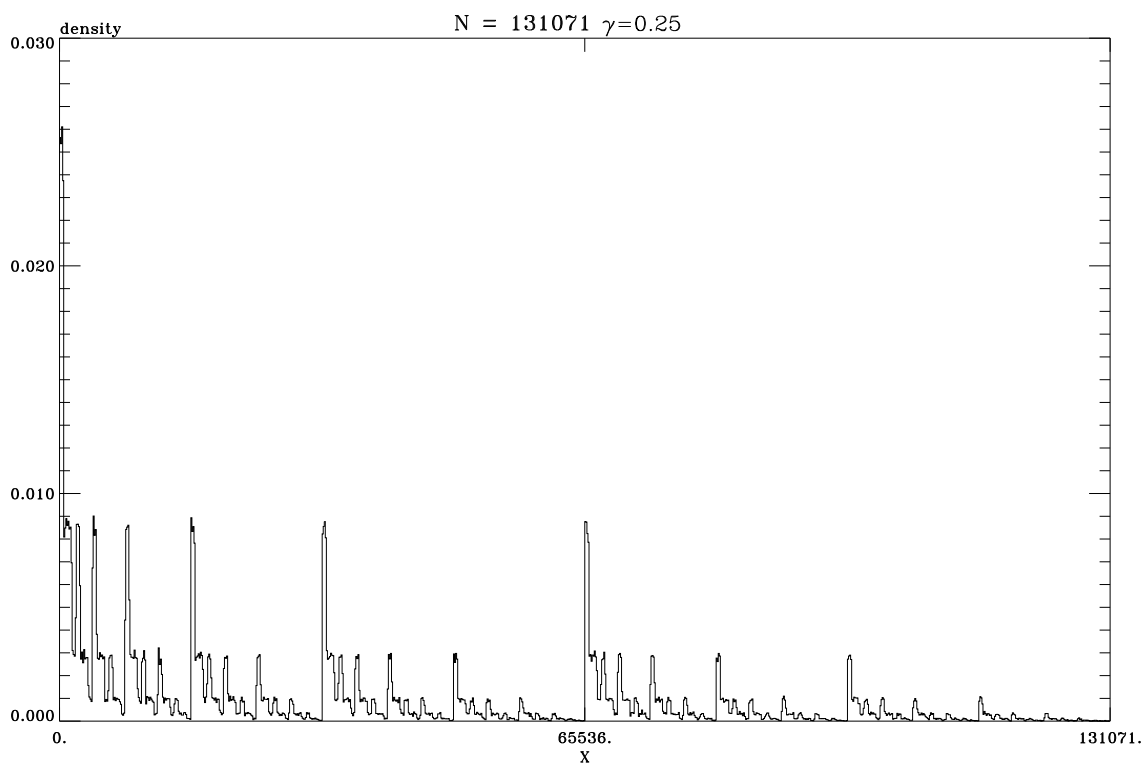
$$\text{et } I(q, l) = \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i = \sum_{j=0}^n C_n^j \gamma^{(n-j)q} (1-\gamma)^{jq} = [\gamma^q + (1-\gamma)^q]^n$$

$$\text{d'où } D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln I(q, l)}{\ln 1/l} = \frac{1}{1-q} \frac{\ln(\gamma^q + (1-\gamma)^q)}{\ln 2}$$

$$\text{pour } q = 0 \text{ on retrouve } D_0 = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$$

Fractal multiplicatif et particules

- M particules au total
- on divise le segment jusqu'à l'étape n telle que $M(1-\gamma)^n = 1$ (1 particule sur le moins dense des segments)
- les particules sont réparties au hasard, selon une loi uniforme, sur chaque segment. Leur nombre est proportionnel au poids de chaque segment.

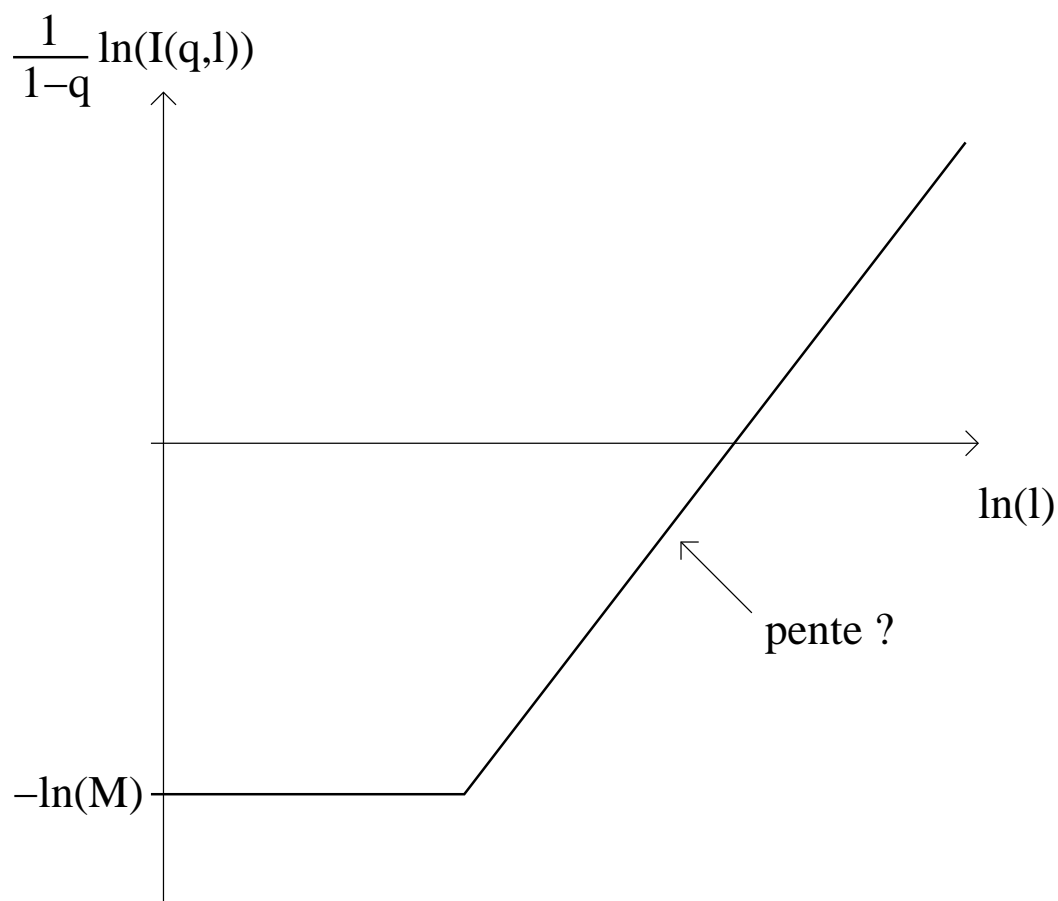


Recherche d'une zone linéaire dans le graphe $\ln(l), \frac{1}{1-q} \ln(I(q, l))$

Remarque : limite $l \rightarrow 0$:

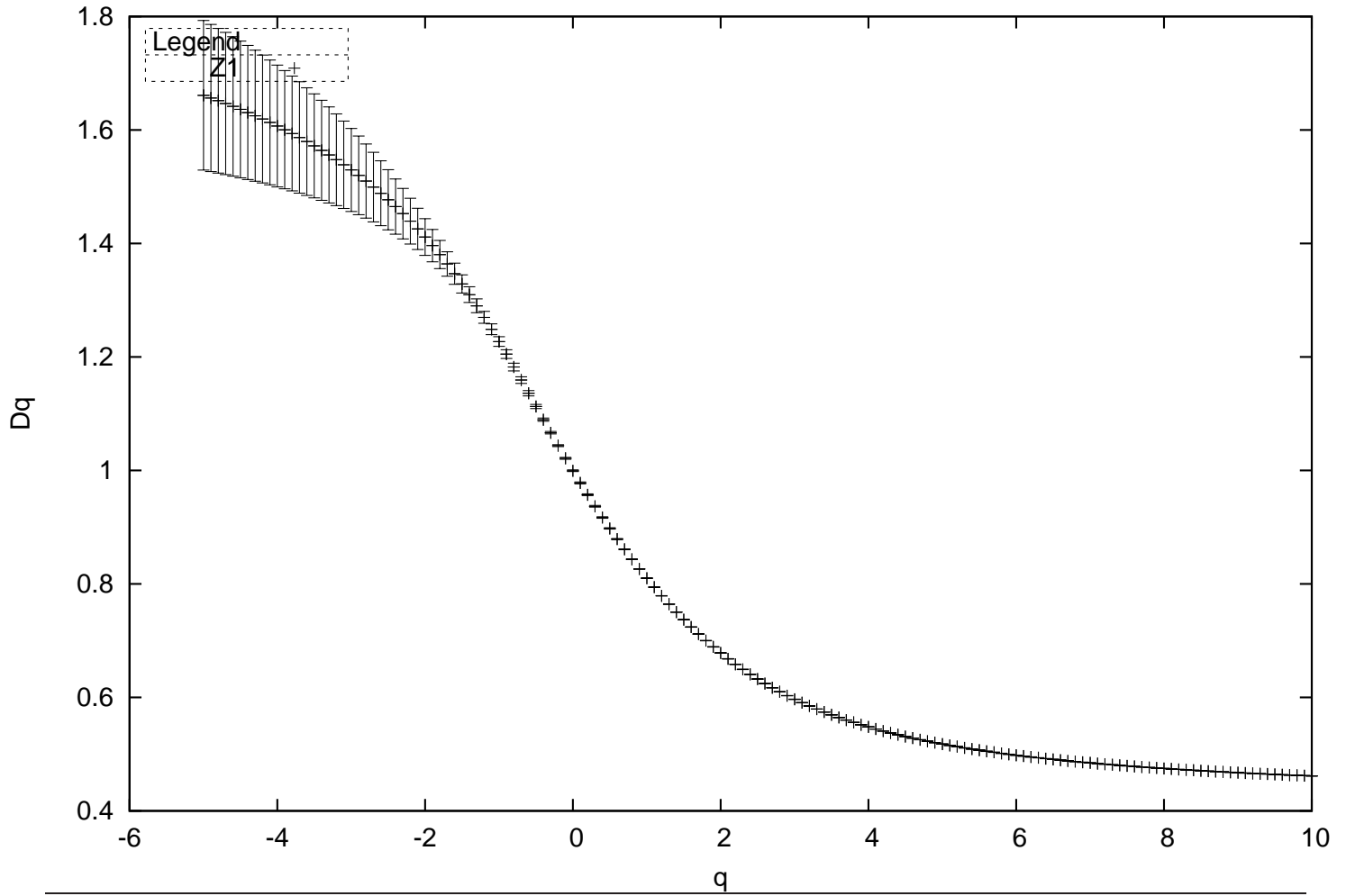
$$N(l) = M \quad \text{et} \quad I(q, l \rightarrow 0) = \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i^q = M \left[\frac{1}{M} \right]^q = M^{1-q}$$

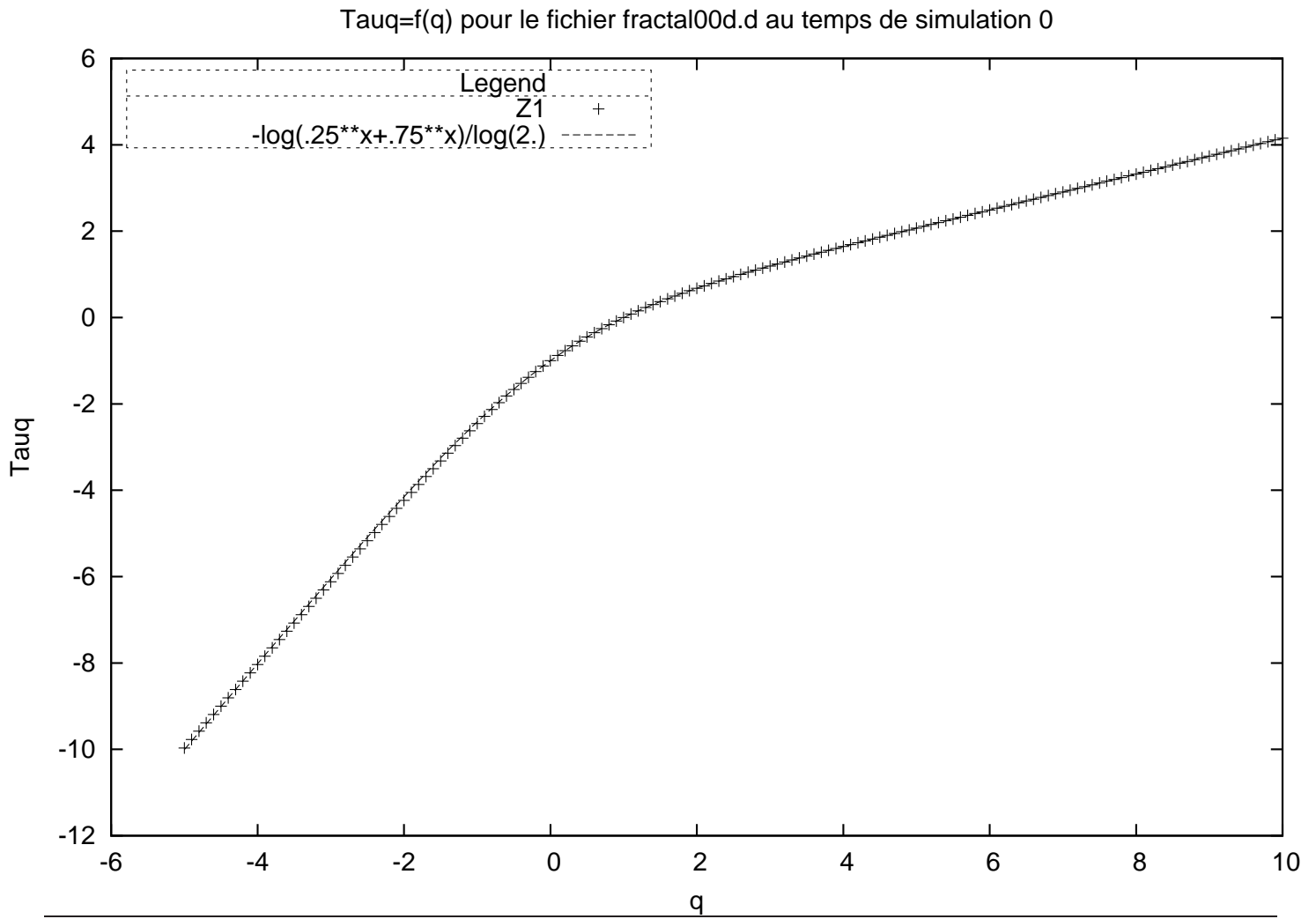
ainsi : $\frac{1}{1-q} \ln(I_q, l \rightarrow 0) = \ln(M)$ indépendant de l



```
gnuplot fractal zl q.gnu
```

Dq=f(q) pour le fichier fractal00d.d au temps de simulation 0





Sous-ensemble fractal S_ξ , $\xi = k/n$

On limite l'étude aux seuls segments de mesure $\mu_k = \gamma^{n-k}\gamma^k$ à l'étape n

On calcule la dimension $D_{0,k}$ de cet ensemble :

$N(k, n) = C_n^k$: nombre de boîtes pour recouvrir S_ξ

Dans la limite $\begin{cases} n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty \end{cases}$ mais $\xi = \frac{k}{n}$ fixé

$$N(k, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\xi(1-\xi)}} \exp[-n(\xi \ln(\xi) + (1-\xi) \ln(1-\xi))]$$

$$\sim 2^{-n(\xi \ln(\xi) + (1-\xi) \ln(1-\xi))}$$

d'où
$$D_{0,\xi} = -\frac{\xi \ln(\xi) - (1-\xi) \ln(1-\xi)}{\ln 2}$$

Chaque sous-ensemble S_ξ est un fractal d'où le terme multi-fractal

Indice α et dimension multifractale $f(\alpha)$

On regarde l'ensemble des cellules telles que

$$\mu_k = A(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^\alpha \sim l^\alpha$$

On suppose que le nombre de cases dont l'indice est dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ s'écrit :

$$\rho(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{-f(\alpha)} d\alpha$$

alors

$$I(q, l) = \int \rho(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{-f(\alpha)} A^q(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{\alpha q} d\alpha = \int \rho(\alpha) A^q(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{\alpha q - f(\alpha)} d\alpha$$

- Pour $l \ll \Lambda$, $I(q, l) \sim l^{\min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))}$ et $\tau_q = \min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))$
-

Indice α et dimension multifractale $f(\alpha)$

On regarde l'ensemble des cellules telles que

$$\mu_k = A(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^\alpha \sim l^\alpha$$

On suppose que le nombre de cases dont l'indice est dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ s'écrit :

$$\rho(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{-f(\alpha)} d\alpha$$

alors

$$I(q, l) = \int \rho(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{-f(\alpha)} A^q(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{\alpha q} d\alpha = \int \rho(\alpha) A^q(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda} \right]^{\alpha q - f(\alpha)} d\alpha$$

- Pour $l \ll \Lambda$, $I(q, l) \sim l^{\min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))}$ et $\tau_q = \min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))$
 - Pour $l \gg \Lambda$, $I(q, l) \sim l^{\max_\alpha(\alpha q - f(\alpha))}$ et $\tau_q = \max_\alpha(\alpha q - f(\alpha))$
-

Modèle

Univers

- à symétrie sphérique,
- suivant l'expansion de Hubble,
- dont le centre d'expansion coïncide avec le point de symétrie.

Équation du mouvement d'une particule à distance r du centre :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M(r)}{r^2}$$

Redimensionnement

On introduit les fonctions arbitraires $A(t)$ et $C(t)$:

$$\begin{aligned}r &= C(t)\hat{r} \\ dt &= A^2(t)d\hat{t}\end{aligned}$$

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2\hat{r}}{d\hat{t}^2} + 2A(t)^2 \left(\frac{C'(t)}{C(t)} - \frac{A'(t)}{A(t)} \right) \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} + \frac{A^4(t)C''(t)}{C(t)}\hat{r} = -\frac{A^4(t)GM}{C^3(t)\hat{r}^2}$$

Choix de $A(t)$ et $C(t)$

$\rightarrow A = C$

$$\frac{d^2\hat{r}}{dt^2} + C^3(t)C''(t)\hat{r} = -C(t)\frac{GM}{\hat{r}^2}$$

Avec $C \sim t^{1/2}$ le coefficient du nouveau terme de force est constant mais la force d'attraction dépend du temps

→ $C(t) \sim t^{2/3}$ et $A(t) \sim t^{1/2}$

$$\begin{aligned} A(t) &= (l + \Omega t)^{1/2} \\ C(t) &= (l + \Omega t)^{2/3} \end{aligned}$$

on a

$$\frac{d^2 \hat{r}}{d\hat{t}^2} + \frac{\Omega}{3} \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} - \frac{2}{9} \Omega^2 \hat{r} = -\frac{GM}{\hat{r}^2}$$

Ω est choisit de sorte la nouvelle force compense exactement la force d'attraction gravitationnelle :

$$-\frac{2}{9} \Omega^2 \hat{r} = -\frac{GM}{\hat{r}^2} \Rightarrow \Omega^2 = \frac{3}{2} \omega_J^2$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2 \hat{r}}{d\hat{t}^2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \omega_J \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} - \frac{1}{3} \omega_J^2 \hat{r} = -\frac{GM}{\hat{r}^2}$$

En chaque point le champ gravitationnel est compensé par le champ introduit par le redimensionnement proportionnel à r : interprété comme dû à un fond fixe neutralisant et homogène de particules de masse négative.

Perturbation plane

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_j \frac{dx}{dt} - \omega_j^2 x = E(x)$$

Systeme 1D de particules qui s'attirent dans un fond fixe neutralisant et homogène répulsif (avec en plus une force de friction) : c'est un anti-plasma \rightarrow système instable.

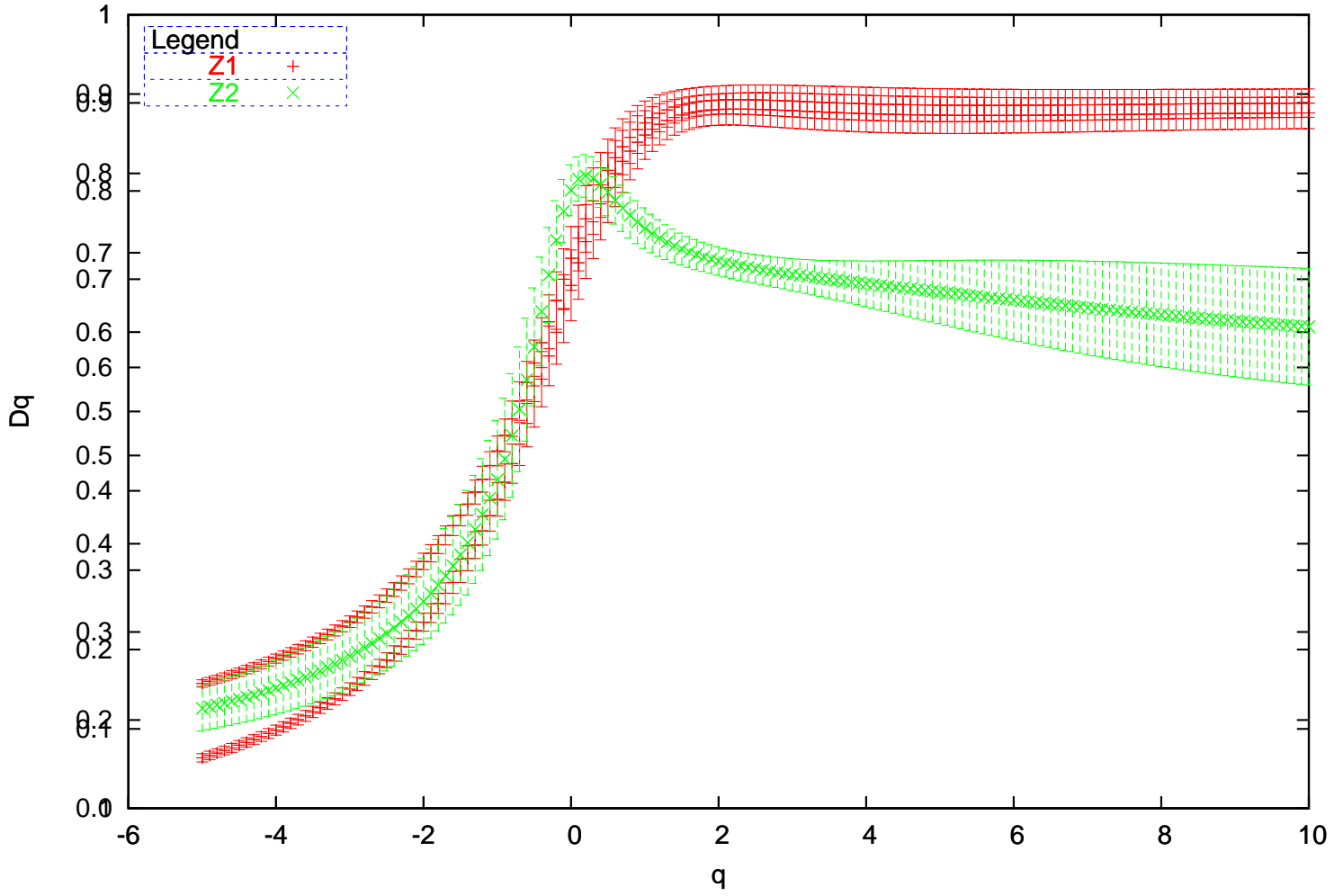
Simulation numérique

- Intégration des équations du mouvement
 - Code N -corps exact
 - rôle : garder la relation d'ordre entre les particules
 - Longueur du système L grande devant la longueur de Jean λ_J .
 - Normalisation $L = N, \omega_J = 1$
 - Condition initiale :
 - densité constante
 - vitesse tirée dans une distribution uniforme
-

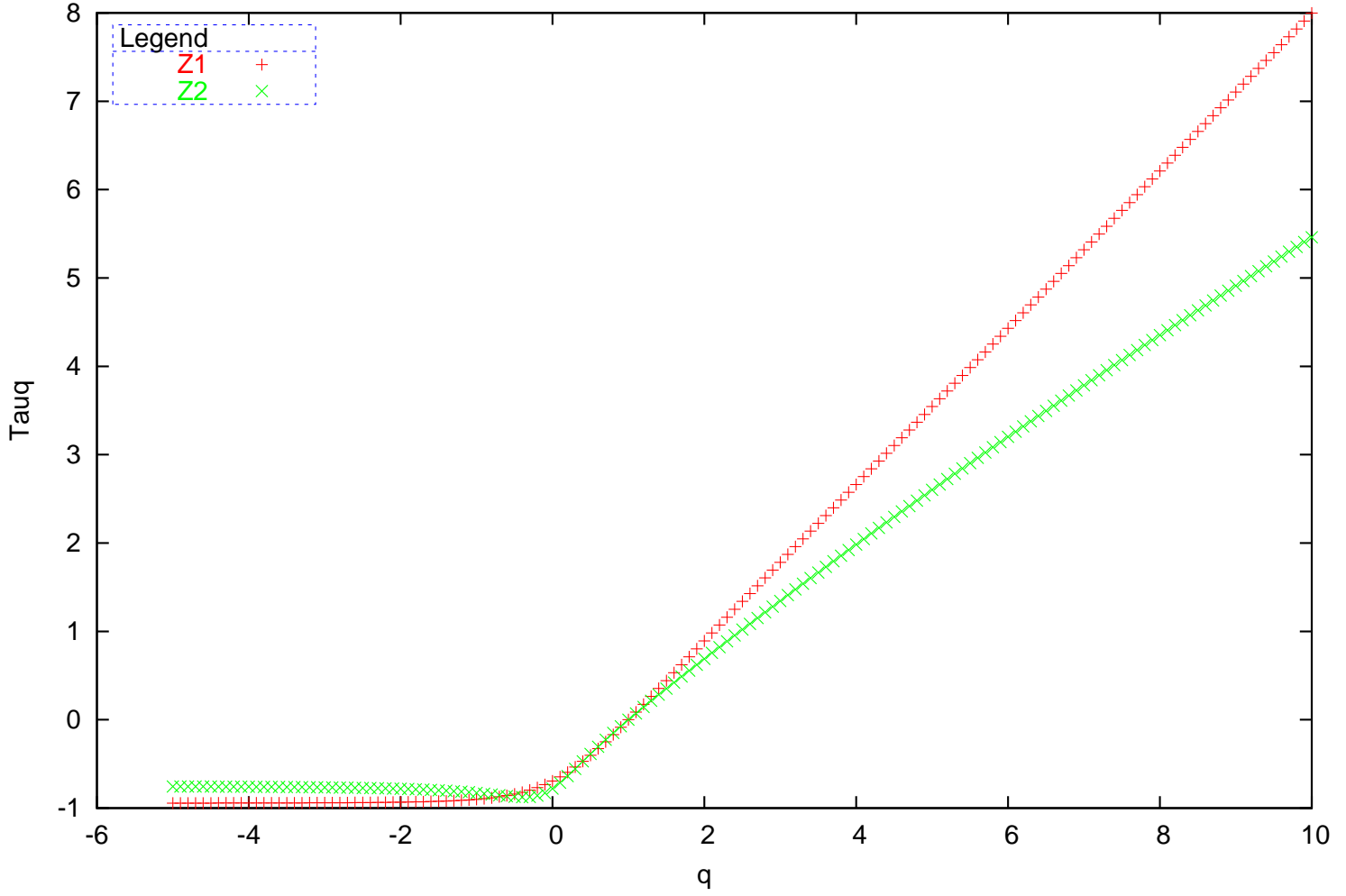


```
gnuplot quintic zl q.gnu
```

Dq=f(q) pour le fichier ../qinticwb00d.d au temps de simulation 14



Tauq=f(q) pour le fichier ../fquinticwb00d.d au temps de simulation 14



Rôle de la friction

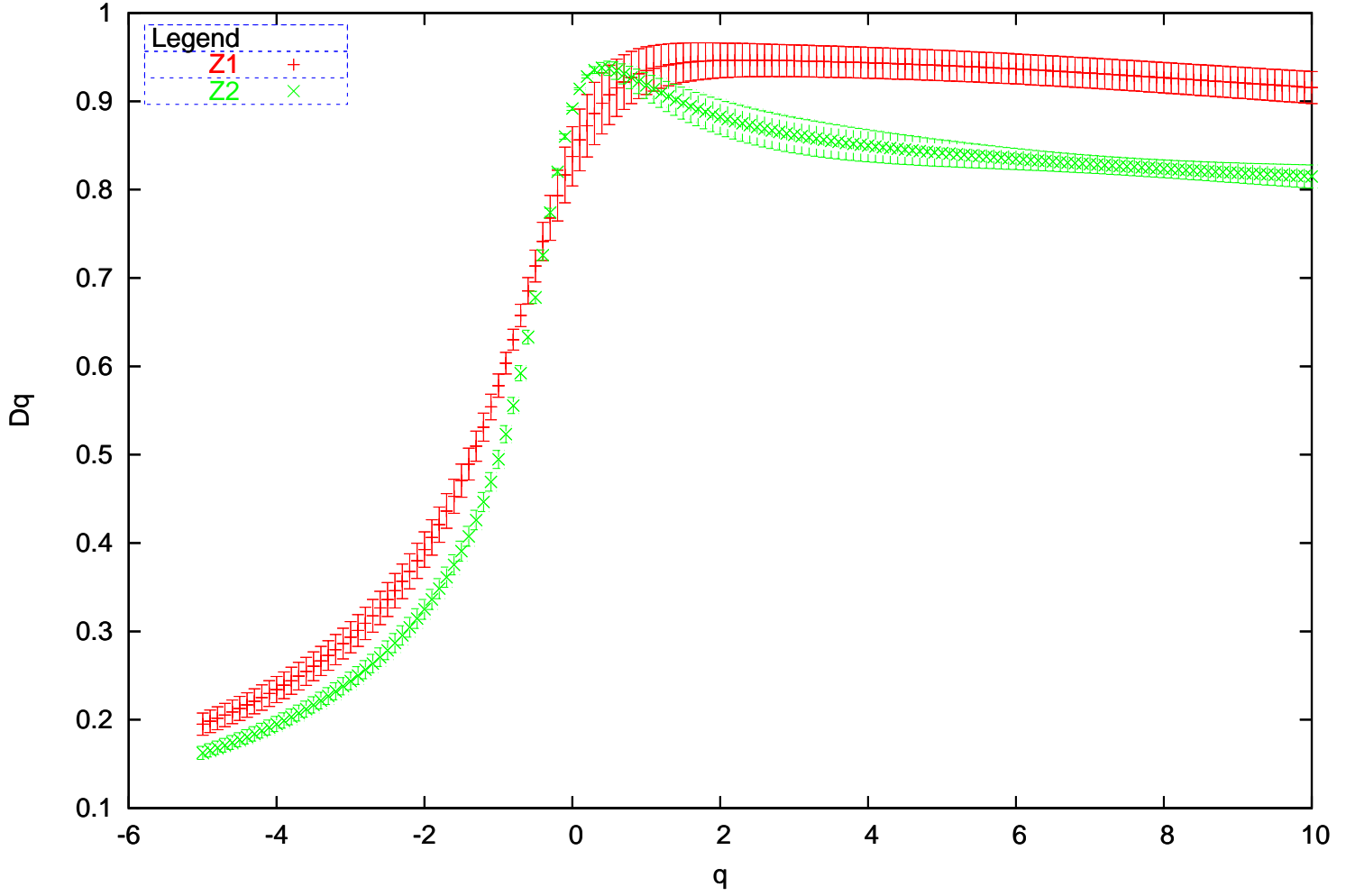
On simule le Système 1D composé de particules qui s'attirent dans un fond fixe neutralisant et homogène répulsif (sans force de friction)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_j^2 x = E(x)$$

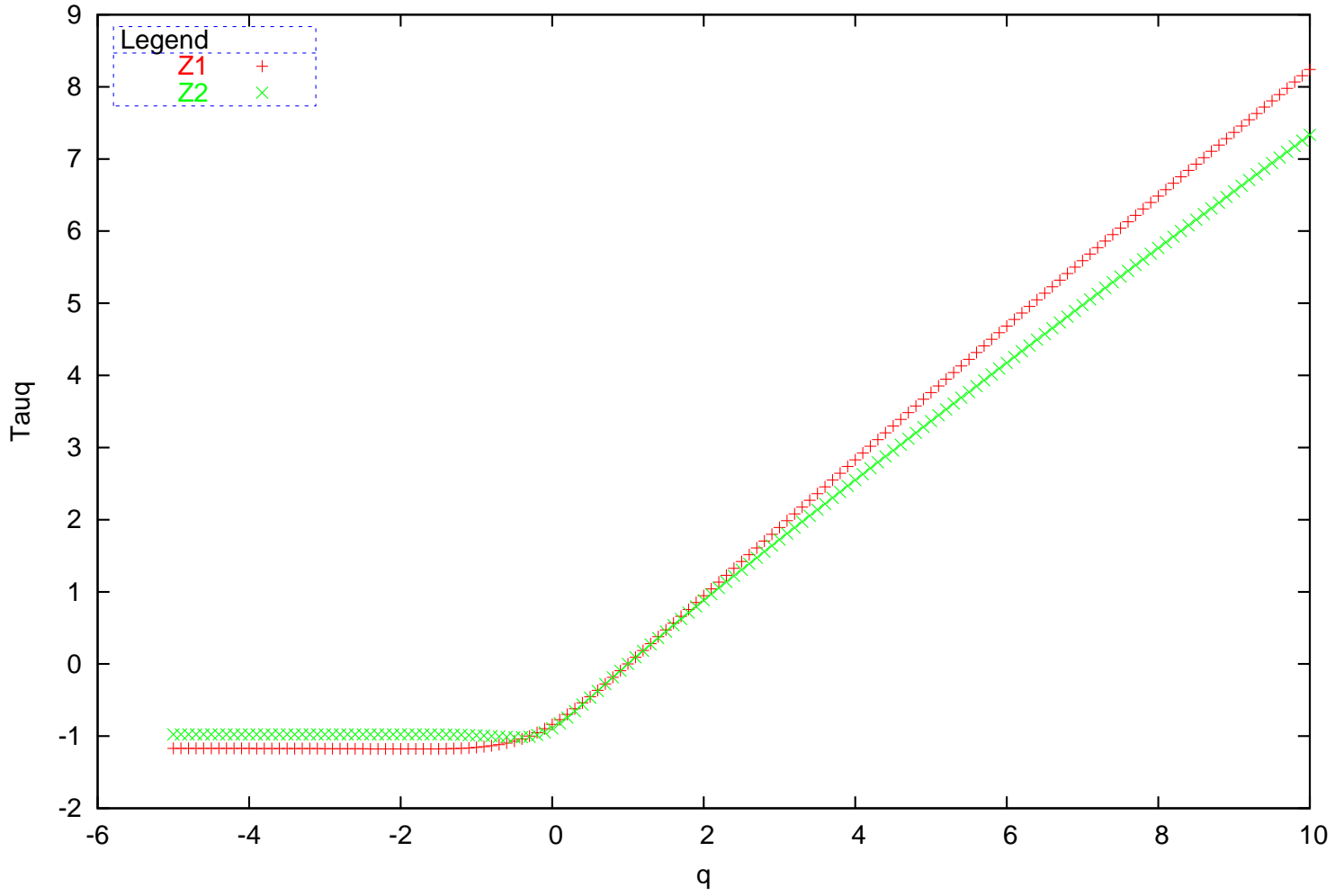


```
gnuplot tcgs zl q.gnu
```

Dq=f(q) pour le fichier ../ftcgswb00d.d au temps de simulation 14



Tauq=f(q) pour le fichier ../ftcgswb00d.d au temps de simulation 14



Conclusions et Perspectives

- Modèle simple d'univers en expansion
 - Construit dans l'espace des phases une structure hiérarchique
 - Fractal complexe
 - Hypothèse bi-fractal est encore à confirmer (détermination de Λ)
 - Regarder les espaces vides/pleins seuls
 - Évolution des dimensions fractales en fonction du temps
-