

Un Modèle de croissance de corail Structuré par taille

P-E Jabin (Univ. Nice)

V. Lemesle (Univ. de la Méditerranée)

D. Aurelle (Univ. de la Méditerranée)

Objectifs

- ▶ Évolution d'une population de corail en prenant en compte la taille des individus.
- ▶ Plus précisément, obtenir un modèle décrivant (**Très sommairement**) la croissance des branches de corail et leurs cassures éventuelles.
- ▶ Ce modèle dépendra éventuellement de conditions extérieures (climatiques ou autres) influant sur la croissance ou la fragilité.
- ▶ Ceci implique une sensibilité particulière des taux de croissance (ou décroissance) des populations de corail, aux conditions correspondantes.

Description sommaire du corail

Une colonie est composée de plusieurs individus (a priori différents génétiquement parlant).

Chaque individu est composé de plusieurs “branches” ramifiées. Chacune de ces branches comporte une ossature calcaire qui sert de support aux polypes.

Ici, on ne s'intéresse pas aux différences génétiques, dont l'on ne tiendra donc pas compte.

→ L'objet et l'échelle à prendre en compte sont donc les branches.

Afin de simplifier au maximum, on oubliera les ramifications des branches.

Le modèle correspondant peut a priori s'appliquer à d'autres espèces (gorgones etc.)

Description d'une branche de corail

On suppose que la branche est **symétrique** par rotation d'où la représentation

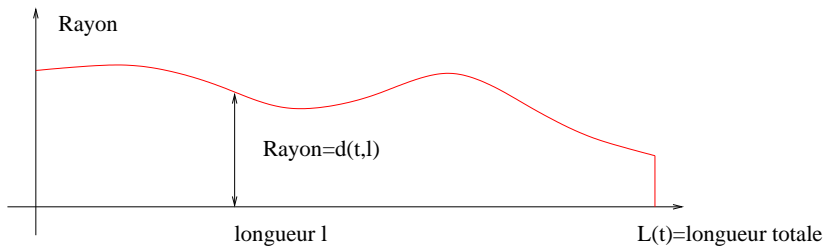


FIG.: Paramétrisation d'une branche

Croissance d'une branche de corail

On suppose que la longueur de la branche **augmente uniformément en temps** depuis une **longueur nulle** à la naissance, soit

$$\frac{dL(t)}{dt} = \sigma, \quad \text{ou} \quad L(t) = \sigma(t - s),$$

si s est le **temps de naissance** de la branche (et donc pas nécessairement de l'individu).

Le **diamètre** en un point **augmente aussi uniformément** lorsque les conditions extérieures sont constantes (cf Marshal et al.)

$$\frac{\partial d(t, l)}{\partial l} = E,$$

où E représente les **conditions extérieures** (très vague), et peut **dépendre du temps**. Finalement

$$d(t, l) = d_0 + \int_{s+l/\sigma}^t E(r) dr, \quad \text{pour} \quad l > \sigma(t - s),$$

$$d(t, l) = 0, \quad \text{pour} \quad l > \sigma(t - s).$$

Cassure d'une branche de corail

On veut estimer la (densité de) **probabilité** $p(t, l, s)$ qu'a la branche de **casser** au **temps** t et à la **position** l .

On suppose que ceci ne **dépend** que la **partie supérieure** de la branche. Par exemple, en imaginant un **flot de cisaillement** sur la branche, on peut prendre

$$\text{Contrainte à } l \sim \int_l^{L(t)} l' d(t, l') dl'.$$

En prenant la **résistance** au point l **proportionnelle** à la densité de **volume**, on obtient

$$p(t, l, s) = \alpha(d(t, l))^{-2} \int_l^{L(t)} l' d(t, l') dl'.$$

Ceci est évidemment une suite d'**hypothèses** essentiellement **invérifiables**...

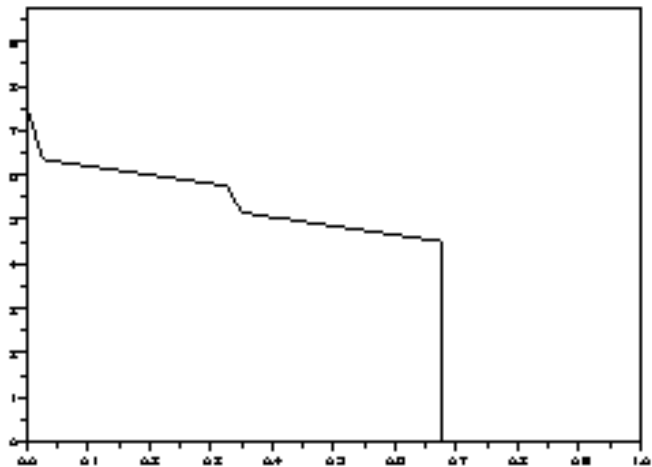


FIG.: Résultat de la croissance d'une branche

Évolution d'une population complète

Première difficulté : On doit garder en mémoire l'**historique** de l'évolution de chaque **branche**.

Pour cela on doit définir :

$n_0(t, l, s)$ = nombre de **branches**, **nées** au temps s qui, au temps t , ont la **longueur** l , et **n'ont jamais cassé**.

$n_1(t, l, s, s_1, l_1)$ = nombre de **branches** qui, en plus, ont **cassé une fois**, au temps s_1 et à la longueur l_1 .

...

$n_k(t, l, s, s_1, \dots, s_k, l_1, \dots, l_k)$ = nombre de **branches** qui, en plus, ont **cassé k fois**, au temps s_1 et à la longueur l_1 , puis à s_2, l_2 et ainsi de suite jusqu'à la dernière cassure à s_k, l_k .

Ceci doit être fait a priori pour **tous les k** , même si en pratique (pour des applications numériques par exemple) n_k est vite très petit.

Morts et naissances

Morts : On prend un **taux de mortalité constant** d pour tous les individus.

⇒ **taux de mortalité constant** pour toutes les branches.

Naissances : On suppose qu'un **individu** ayant k **branches de longueurs** $l_1 \dots l_k$ contribue en moyenne aux naissances pour

$$b(l_1) + \dots b(l_k).$$

On peut alors définir un **taux de naissance** pour une branche de taille l comme $b(l)$.

Cette **hypothèse** est **douteuse** mais **nécessaire** si l'on veut écrire le système simplement à l'**échelle des branches**.

Un premier système

On obtient alors une hiérarchie d'équations sur les n_k du type

$$\partial_t n_0 + \sigma \partial_l n_0 = -(d + S_0(t, l)) n_0(t, s, l),$$

où $S_0(t, l)$ est la probabilité totale pour une branche simple de casser soit

$$S_0(t, l) = \alpha \int_0^l p(t, l', t - l/\tau) dl'.$$

Pour n_k , $k > 1$, l'équation est "pire"

$$\begin{aligned} \partial_t n_k + \sigma \partial_l n_k = & -dn_k - \alpha n_k \int_0^l \frac{\int_{l'}^l \delta_k(t, l'', \dots) l'' dl'' dl'}{(\delta_k(t, l', s, s_1, \dots, l_k))^2} \\ & + \alpha \int_l^\infty n_{k-1}(t, l', s, s_1, \dots, l_{k-1}) \frac{\int_{l_k}^{l'} \delta_{k-1}(t, l'', s, s_1, \dots, l_{k-1}) l'' dl''}{(\delta_{k-1}(t, l_k, s, s_1, \dots, l_{k-1}))^2} dl'. \end{aligned}$$

Ce système n'est pas raisonnable à étudier ou simuler.

Vers un modèle simplifié

On suppose essentiellement qu'une **branche cassera à nouveau seulement plus loin** que la cassure précédente.

Après analyse, ceci revient à la **condition**

$$\delta_0^2 \ll \frac{l^3}{\alpha \sigma^3}.$$

Comme la **probabilité de casser** au point l **dépend** seulement de ce qui se passe **après** l , on n'a **plus besoin** de garder en mémoire l'**histoire** de la branche.

On peut obtenir une **équation** directement sur le **nombre total de branches** de taille l

$$n(t, l) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{l_1, \dots, l_k=0}^l \int_{s_1, \dots, s_k=s}^t n_k(t, l, s, s_1, \dots, l_k) ds_1 \dots dl_k.$$

Le nouveau modèle

Prenons, pour simplifier, les conditions extérieures constantes $I(t) = I$. On obtient

$$\partial_t n(t, I) + \sigma \partial_I n = -dn - \alpha n \int_0^I \frac{\int_{I'}^I (d_0 + I(I - I'')/\sigma) I'' dl'' dl'}{(d_0 + I(I - I')/\sigma)^2} \\ + \alpha \int_I^\infty n(t, I') \frac{\int_I^{I'} (d_0 + I(I' - I'')/\sigma) I'' dl''}{(d_0 + I(I' - I)/\sigma)^2} dl'.$$

$\sigma \partial_I n$ est le terme de croissance des branches.

$-dn$ est évidemment le terme de mortalité. C'est le seul qui diminue le nombre de branches.

Les termes en rouge correspondent aux cas où les branches cassent. On doit enlever les branches de taille I qui cassent et rajouter les nouvelles branches de taille plus petite.

Conditions au bord et naissances

Les **nouvelles branches**, qui correspondent à une nouvelle branche pour un individu déjà vivant ou à un nouvel individu, apparaissent comme **un terme de bord** car leur **longueur** est initialement **nulle**

$$n(t, 0) = \int_0^{+\infty} b(l)n(t, l)dl. \quad (1)$$

Si **$b(l)$ est croissant** en l , l'effet dû aux **branches se cassant** est de **diminuer la taille moyenne** des branches et donc le **taux de natalité** global. C'est bien ce que l'on cherche à observer.

Finalement le système a besoin d'une **condition initiale**

$$n(0, l) = n^0(l). \quad (2)$$

En général, c'est un **problème important** : on n'a **pas d'idée** précise sur la **condition initiale** à mettre.

Étude du modèle simplifié

Couplé à (2) et (1), on étudie le modèle sous sa **forme générale**

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial l} = -(d + S(l))n(t, l) + \int_l^{+\infty} K(l, l')S(l')n(t, l')dl', \quad (3)$$

où l'on a changé l'échelle de sorte que $\sigma = 1$. On de plus la propriété

$$\int_0^{l'} K(l, l')dl = 1.$$

Ces équations **ressemblent** beaucoup aux modèles de **populations structurées par âge** par exemple (la taille remplaçant le taux maturation). On peut notamment suivre la preuve de Mischler, Perthame et Ryzhik pour obtenir que, **pour toute donnée initiale**,

$$n(t, l) \longrightarrow e^{\gamma t} N(l), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Il suffit donc d'**estimer** γ et N pour avoir le comportement de la population **sans se soucier de** n^0 .

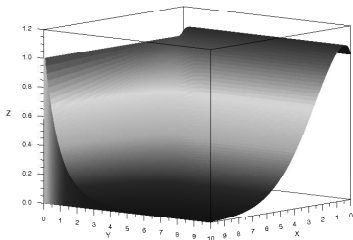


FIG.: Convergence vers le régime permanent, taux $S(I)$ important

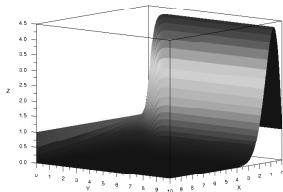


FIG.: Convergence vers le régime permanent, taux $S(I)$ faible

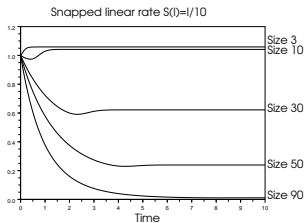


FIG.: Évolution des effectifs pour quelques tailles, taux $S(l)$ important

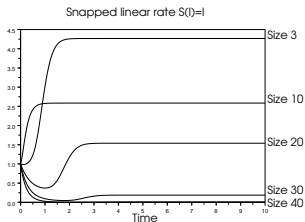


FIG.: Évolution des effectifs pour quelques tailles, taux $S(l)$ faible

Régime permanent

Une fonction $e^{\gamma t} n_{\gamma}(l)$ est solution du système (3) avec (1) ssi

$$\frac{dn_{\gamma}}{dl} = -(d + S(l) + \gamma)n_{\gamma} + \int_{l' > l} K(l, l')S(l')n_{\gamma}(l')dl', \quad (4)$$

avec la condition de **normalisation**

$$n_{\gamma}(0) = \int_0^{\infty} b(l)n_{\gamma}(l) dl = 1. \quad (5)$$

On peut prouver qu'il existe **un unique** γ_0 et une solution **unique** n_{γ_0} du système précédent, ce qui donne le **taux de croissance asymptotique** de la population.

On peut alors **évaluer**, au moins **numériquement**, l'**influence des conditions extérieures** sur ce taux.

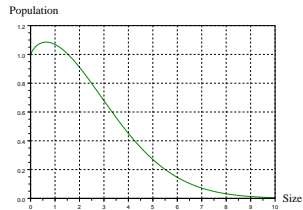


FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(l)$ important

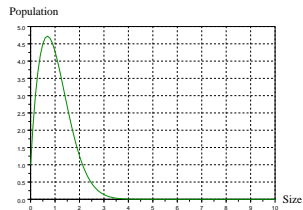


FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(l)$ faible

Protection des populations

Au temps 5, on suppose que l'on protège complètement la population : $S = 0$ pour $t > 5$.

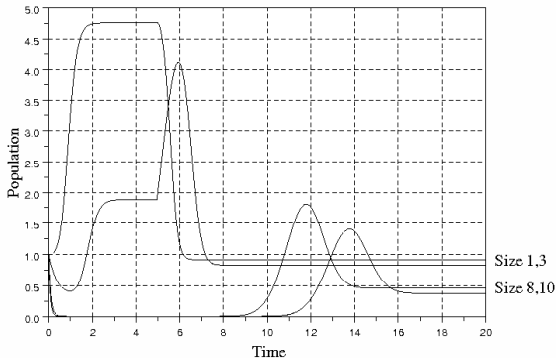


FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(I)$ important

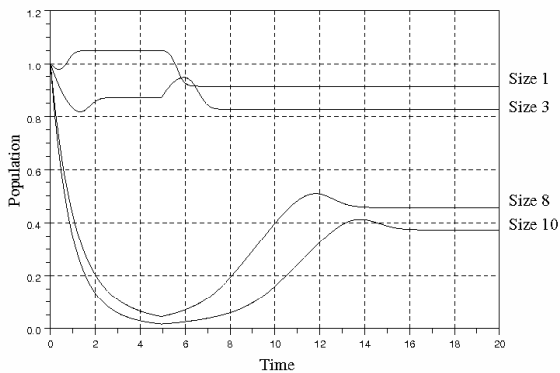


FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(l)$ faible