

# Contrôle optimal de la rentrée atmosphérique d'une navette spatiale

Emmanuel Trélat<sup>1</sup>

<sup>1</sup>MAPMO  
Université d'Orléans

Cascimodot, 6 décembre 2007



## Contrôle optimal de la rentrée atmosphérique d'une navette spatiale (projet du CNES)

### Motivations

- transferts orbitaux aéroassistés
- développement de lanceurs récupérables
- problèmes de rentrée atmosphérique : Mars Sample Return (CNES)

Coron-Praly : **stabilisation**.

Bonnard-Faubourg-T : **contrôle optimal**

### Rôle de l'arc atmosphérique

- réduction de l'énergie cinétique par friction avec l'atmosphère
- guider l'engin d'un point initial (position + vitesse) à un point final
- prendre en compte des contraintes sur l'état (flux thermique, accélération normale, pression dynamique)

Control

Configuration aérodynamique.

Plage

$30 \text{ km} < \text{altitude} < 120 \text{ km}$ .

# Modèle

## Forces

- Gravité :  $-m\vec{g}$
- Force aérodynamique :
  - 1 traînée :  $\frac{1}{2}\rho SC_D v^2$
  - 2 portance :  $\frac{1}{2}\rho SC_L v^2 (\cos \mu \vec{j} + \sin \mu \vec{k})$

## Contrôle

Angle de gîte  $\mu$  (la navette est un **planeur**).

## Critère d'optimisation

Flux thermique total  $\Phi = \int_{t_0}^{t_f} C_q \sqrt{\rho} v^3 dt$ .



$\rho(r) = \rho_0 e^{-r}$  : densité atmosphérique.



# Système

$$\dot{r} = v \sin \gamma$$

$$\dot{v} = -g \sin \gamma - \rho \frac{SC_D}{2m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi)$$

$$\dot{\gamma} = \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \rho \frac{SC_L}{2m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi + \Omega^2 \frac{r \cos L}{v} (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi)$$

$$\dot{L} = \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi$$

$$\dot{l} = -\frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L}$$

$$\dot{\chi} = \rho \frac{SC_L}{2m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) + \Omega^2 \frac{r \sin L \cos L \sin \chi}{v \cos \gamma}$$

Etat  $x = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$

- $r$  rayon,
- $v$  vitesse relative,
- $\gamma$  angle de vol,
- $L$  latitude,
- $l$  longitude,
- $\chi$  azimut.

Contrôle  $\mu$   
(angle de gîte)



Système de la forme

$$\dot{x} = X(x) + u_1 Y_1(x) + u_2 Y_2(x), \quad u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad (\text{avec } u_1 = \cos \mu, u_2 = \sin \mu)$$

Denis Polson

### Contraintes sur l'état

- **Flux thermique** :  $\Phi = C_q \sqrt{\rho} V^3 \leq \Phi^{max}$
- **Accélération normale** :  
 $\gamma_n = \gamma_{n0} C_D \rho V^2 \leq \gamma_n^{max}$
- **Pression dynamique** :  $P = \frac{1}{2} \rho V^2 \leq P^{max}$

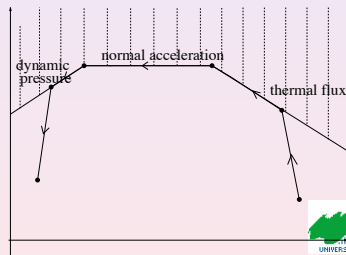
	conditions initiales	conditions finales
altitude	119.82 km	15 km
vitesse	7404.95 m/s	445 m/s
angle de vol	-1.84 deg	libre
azimut	libre	libre
latitude	0 deg	10.99 deg
longitude	libre ou fixée à 116.59 deg	166.73 deg

### Méthode de Harpold et Graves (1979)

Saturer les contraintes sur l'état le long du vol.

→ pas optimal pour le critère d'optimisation :

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_f} C_q \sqrt{\rho} V^3 dt$$



# Modélisation sous forme d'un problème de contrôle optimal

Etat :  $x(t)$

Contrôle :  $u(t)$

Problème de contrôle optimal

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbf{R}^m,$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

$$c(x(t)) \leq 0,$$

$$\min C(T, u), \quad \text{où } C(T, u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$



## Système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

## Coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$

## Problème de contrôle optimal

Déterminer les trajectoires  $x(\cdot)$  solutions de (1), vérifiant  $x(0) \in M_0$ ,  $x(T) \in M_1$ , et  $c(x(t)) \leq 0$ , et minimisant le coût  $C(T, u)$ .



## Méthodes numériques

- 1 méthodes directes
- 2 méthodes indirectes



# Méthodes directes

## 1. Discrétisation totale

L'état et le contrôle sont discrétisés

⇒ problème d'optimisation non linéaire en dimension finie

$$\begin{aligned} \min F(Z), \\ g(Z)=0 \\ h(Z)\leq 0 \end{aligned}$$

où  $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$ .

→ **Résolution numérique** : méthodes de gradient, pénalisation, SQP (sequential quadratic programming), méthodes duales (Uzawa), etc.

## 2. Equation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_1(x, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0,$$

où  $H_1(x, p) = \max_{u \in U} \langle p, f(x, u) \rangle - f^0(x, u)$ .

→ **Résolution numérique** : méthodes explicites, level set, ...



# Méthodes indirectes

Basées sur l'emploi préalable du **Principe du Maximum** (Pontryagin, Maurer, Jacobson, etc) :

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u) + \eta c(x).$$

## Principe du Maximum

Toute trajectoire minimisante  $x(\cdot)$  est la projection d'une **extrémale**  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$



# Méthodes indirectes

Basées sur l'emploi préalable du **Principe du Maximum** (Pontryagin, Maurer, Jacobson, etc) :

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u) + \eta c(x).$$

## Principe du Maximum

Toute trajectoire minimisante  $x(\cdot)$  est la projection d'une **extrémale**  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

↙

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$

(localement, e.g. sous la condition de Legendre stricte :  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x, p, u)$  définie négative)



# Méthodes indirectes


Basées sur l'emploi préalable du **Principe du Maximum** (Pontryagin, Maurer, Jacobson, etc) :

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u) + \eta c(x).$$

## Principe du Maximum

Toute trajectoire minimisante  $x(\cdot)$  est la projection d'une **extrémale**  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$


  
 $u(t) = u(x(t), p(t))$

(localement, e.g. sous la condition de Legendre stricte :  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x, p, u)$  définie négative)



# Méthodes indirectes

## - Méthode de tir simple

Les **extrémales**  $(x, p)$  sont solutions de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p(0) = p_0,$$

où le contrôle optimal maximise le Hamiltonien.

→ **Méthode de tir** : déterminer  $p_0$  t.q.  $x(T) = x_1$ .

## - Méthode de tir multiple



**Logiciel** : **COTCOT** (Conditions of Order Two and COnjugate Times)

<http://www.n7.fr/apo/cotcot/>

- génération automatique en *Fortran* des équations du principe du maximum (différentiation automatique, *Adifor*) ;
- création automatique de fichiers *mex* pour *Matlab* ;
- codes *Fortran* pour l'intégration numérique, méthodes de tir, et calcul de temps conjugués, interfacés avec *Matlab*.



B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. (2007).



B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Cotcot : short reference manual*, Technical report RT/APO/05/1, <http://www.n7.fr/apo/cotcot>.



## Problème de contrôle optimal



## Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc.



## Dualisation

Kuhn-Tucker,  
puis méthode de NewtonMéthodes directes

## Dualisation

Principe du maximum



## Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc,  
puis Newton (méthode de tir)méthodes indirectes

Problème de contrôle optimal



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc.



Dualisation

Kuhn-Tucker,  
puis méthode de Newton

Méthodes directes

Dualisation

Principe du maximum



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc,  
puis Newton (méthode de tir)

méthodes indirectes



Pas de commutation en général.

Commutation pour les méthodes de Runge-Kutta à coefficients  $> 0$  (cf Hager, 2000).



<b>Méthodes directes</b>	<b>Méthodes indirectes</b>
mise en oeuvre simple, sans connaissance a priori	connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale
peu sensibles au choix de la condition initiale	très sensibles au choix de la condition initiale
facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte
précision numérique basse ou moyenne	très grande précision numérique
efficaces en basse dimension	efficaces en toute dimension
gourmandise en mémoire	calculs parallélisables
problème des minima locaux	petit domaine de convergence

- méthodes hybrides
- méthodes de continuation (homotopie)
- ...



Ici, on utilise les *méthodes de tir*, plus précises mais moins faciles à faire converger.

## Problème

Comment faire converger la méthode de tir ?

Différents outils :

- 1 application préalable d'une méthode directe
- 2 méthode de continuation
- 3 étude géométrique (→ **rentrée atmosphérique**)



# Analyse du système

$$\dot{r} = v \sin \gamma$$

$$\dot{v} = -g \sin \gamma - \rho \frac{SC_D}{2m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi)$$

$$\dot{\gamma} = \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \rho \frac{SC_L}{2m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi$$

$$+ \Omega^2 \frac{r \cos L}{v} (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi)$$

$$\dot{L} = \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi$$

$$\dot{\chi} = -\frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L}$$

$$\dot{\mu} = \rho \frac{SC_L}{2m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi$$

$$+ 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) + \Omega^2 \frac{r \sin L \cos L \sin \chi}{v \cos \gamma}$$



# Analyse du système

## Système

$$\dot{x} = X(x) + u_1 Y_1(x) + u_2 Y_2(x), \quad u_1^2 + u_2^2 = 1$$

Si on néglige la rotation  $\Omega$  de la planète :

### Premier sous-système ( $u_1 = \cos \mu$ )

$$\dot{r} = v \sin \gamma$$

$$\dot{v} = -g \sin \gamma - \rho \frac{SC_D}{2m} v^2$$

$$\dot{\gamma} = \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \rho \frac{SC_L}{2m} v u_1$$

### Second sous-système ( $u_2 = \sin \mu$ )

$$\dot{L} = \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi$$

$$\dot{\chi} = \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L}$$

$$\dot{\chi} = \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + \rho \frac{SC_L}{2m} \frac{v}{\cos \gamma} u_2$$

# Analyse du système

## Système

$$\dot{x} = X(x) + u_1 Y_1(x) + u_2 Y_2(x), \quad u_1^2 + u_2^2 = 1$$

Si on néglige la rotation  $\Omega$  de la planète :

### Premier sous-système ( $u_1 = \cos \mu$ )

$$\dot{r} = v \sin \gamma$$

$$\dot{v} = -g \sin \gamma - \rho \frac{SC_D}{2m} v^2$$

$$\dot{\gamma} = \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \rho \frac{SC_L}{2m} v u_1$$

→

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q), \quad |u_1| \leq 1$$

$$\text{où } q = \begin{pmatrix} r \\ v \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$



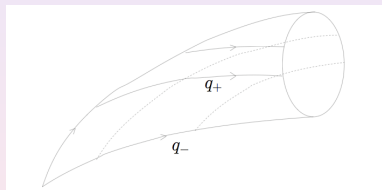
# Structure des trajectoires temps-minimales

Système dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\dot{q} = X(q) + uY(q), \quad |u| \leq 1$$

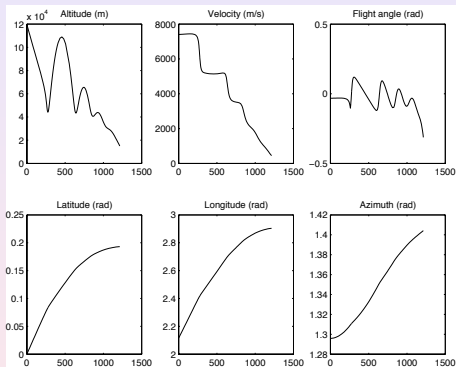
**Théorème** (Bressan, Krener-Schättler, Kupka, Sussmann, ...)

Sous certaines conditions sur les crochets de Lie :  
l'ensemble accessible en temps petit est borné par  
les surfaces formées par les arcs  $q_+ q_-$  and  $q_- q_+$ .  
Tout point intérieur est atteint par  $q_- q_+ q_-$  ou  
 $q_+ q_- q_+$ .

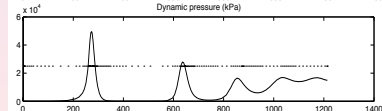
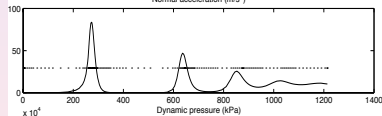
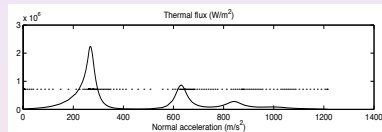
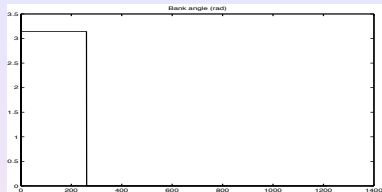


Ensemble accessible en temps petit  
dans  $\mathbb{R}^3$ .

Essai avec une telle stratégie :



→ Contraintes sur l'état non respectées.



# Avec des contraintes sur l'état :

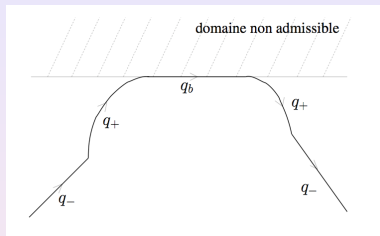
Système dans  $\mathbf{R}^3$  :

$$\dot{q} = X(q) + uY(q), \quad |u| \leq 1,$$

Contrainte sur l'état :

$$c(q) \leq 0.$$

Problème de temps minimal.



## Théorème

(Bonnard-Faubourg-T, 2003)

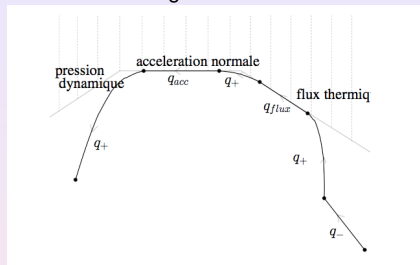
Soit  $q_0 \in \{c = 0\}$ . On suppose que :

- 1 en  $x_0$ ,  $X$ ,  $Y$  et  $[X, Y]$  forment un repère, et  $[X \pm Y, [X, Y]](x_0) = aX(x_0) + bY(x_0) + c[X, Y](x_0)$ , avec  $a < 0$ .
- 2 la contrainte est d'ordre 2 et le contrôle frontière est non saturant.

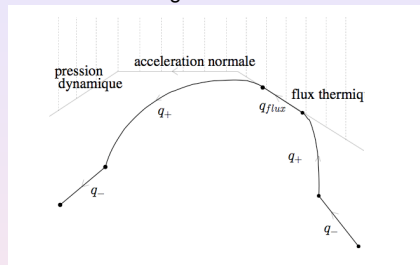
Alors l'arc frontière passant par  $q_0$  est localement temps-minimal si et seulement si l'arc  $q_-$  est contenu dans le domaine non admissible  $c \geq 0$ . Dans ce cas, la synthèse locale temps minimal est de la forme  $q_- q_+ q_b q_+ q_-$ .

# Application au problème de rentrée atmosphérique

**Problème 1** : longitude initiale libre.

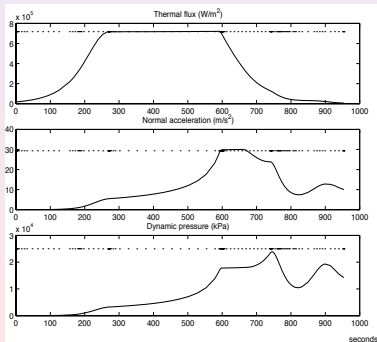
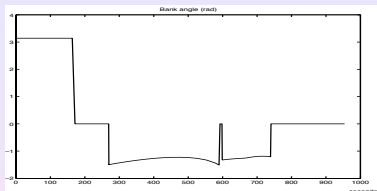
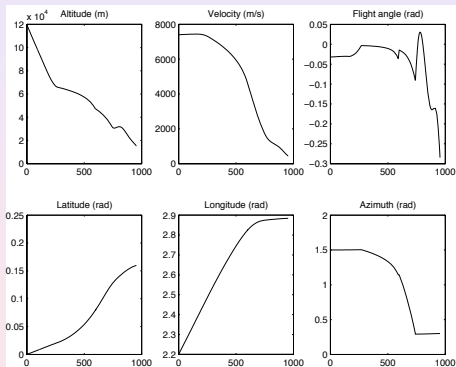


**Problème 2** : longitude initiale fixée.

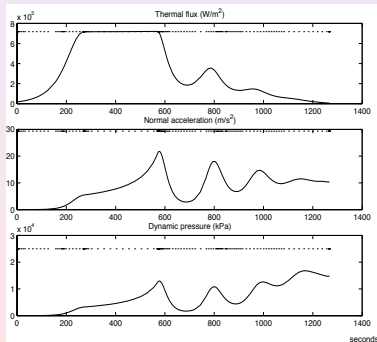
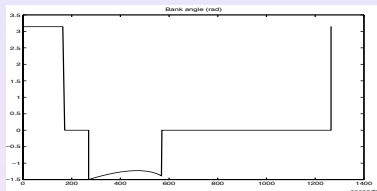
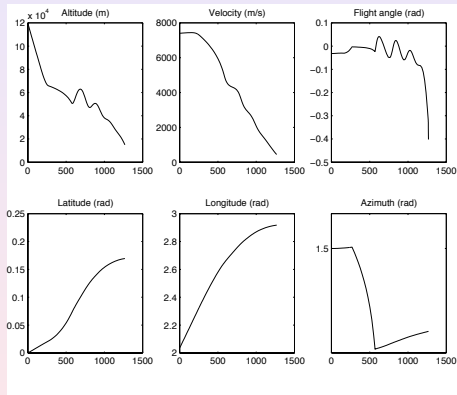


	conditions initiales	conditions finales
altitude	119.82 km	15 km
vitesse	7404.95 m/s	445 m/s
angle de vol	-1.84 deg	libre
azimut	libre	libre
latitude	0 deg	10.99 deg
longitude	libre ou fixée à 116.59 deg	166.73 deg

# Problème 1 : longitude initiale libre.



# Problème 2 : longitude initiale fixée.



via Polsson

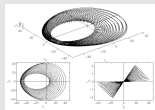
# Quelques problèmes ouverts

- **synthèses optimales** en dimension  $> 3$   
(application possible : transfert orbital avec contraintes d'éclipse)
- théorie générale des **points conjugués**, incluant des arcs singuliers et des contraintes sur l'état  
(application possible : problème des lanceurs, Ariane, CNES)
- méthodes **HJB** pour les problèmes d'aéronautique  
(sujet d'étude dans le pôle **OPALE**)
- problème de commutation "**discrétisation  $\leftrightarrow$  dualisation**"



Ces entreprises partenaires interviennent dans l'enseignement, accueillent nos stagiaires et recrutent nos diplômés :

Agence de l'Eau	Dassault Systèmes	IXSEA
Alstom	EADS	Leclerc
Altran	Ecole des Mines	Lexmark
Areva	Ecole Vétérinaire d'Alfort	Mitsubishi
Auchan	EDF	ONERA
Banque Hervet	France Telecom RSD	PSA
BIA Climatic	GDF	RATP
BNP Paribas	GE Medical	Renault
BRGM	GFI Informatique	RTE
CEA	GIAT Industrie	Safran
Cemagref	IBM	Schlumberger
CNES	IFP	Schneider Electric
CNRS	IFREMER	Sopra Group
Crédit Agricole	INRA	Steria
CRIL Technologies	INRIA	Thalès
DDE	INSERM	Ville d'Orléans



#### Contacts :

Responsable du Master : Emmanuel Trélat ([Emmanuel.Trelat@univ-orleans.fr](mailto:Emmanuel.Trelat@univ-orleans.fr)),  
Formation Continue et VAE : Jean Gilbert ([Jean.Gilbert@univ-orleans.fr](mailto:Jean.Gilbert@univ-orleans.fr))

Secrétariat : Christelle Morillon ([Christelle.Morillon@univ-orleans.fr](mailto:Christelle.Morillon@univ-orleans.fr)),  
02 38 41 70 16

Pour plus de détails:

<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/trelat/masterPASSION.html>

## Master PASSION

Processus,  
Automatique,  
Simulation,  
Statistiques,  
Imagerie,  
Optimisation  
Numérique



Ce Master mention Mathématiques prépare à des emplois d'ingénieurs dans les industries utilisant les statistiques, le calcul scientifique et les méthodes numériques, la théorie de la commande, et les logiciels et outils informatiques associés. Le but est de donner aux étudiants une solide formation dans les domaines précités, leur permettant une insertion rapide en entreprise.

Ce Master, qui a un partenariat avec le CNAM, propose un approfondissement des connaissances et une professionnalisation pour les étudiants issus des filières de Mathématiques, d'Electronique, Electrotechnique et Automatique (EEA), d'Informatique, de Bio-Statistique, et s'adresse aussi aux étudiants issus d'une école d'ingénieurs (ou en troisième année d'une école). D'autre part, ce Master est accessible à tous les candidats relevant d'un dispositif de Formation Continue.

**Débouchés :** aéronautique, automobile, électrotechnique, réseaux, robotique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur bancaire, médical, chimique, génie des procédés, imagerie... Des débouchés sont également possibles au CEA, à l'INRIA, à l'INRA, etc, et/ou en partenariat avec l'Université (thèses CIFRE par exemple).



MAPMO  
MAPMO



**Objectifs:** former des ingénieurs capables de mettre les outils mathématiques au service de l'entreprise.

**Deux parcours possibles:**

### Parcours SRO (Statistiques et Recherche Opérationnelle)

**Compétences:** Analyse et fouille de données [analyse de grands tableaux de données qualitatives ou quantitatives, méthodes et algorithmes de Data Mining], modélisation aléatoire [connaissance des modèles statistiques et des outils de statistique inférentielle associés], probabilité numérique [méthodes de simulation de Monte-Carlo, algorithmes récents d'estimation statistique, mathématiques financières], recherche opérationnelle et optimisation discrète numérique.

**Débouchés:** Banques, assurances, milieux financiers, entreprises de logistique, secteurs industriels de pointe dans lesquels l'optimisation, la recherche opérationnelle, le contrôle de qualité ou l'analyse de la fiabilité ont une grande importance. Des ouvertures sont possibles vers la recherche en économie, traitement du signal, méthodes numériques de la physique.



### Parcours A (Automatique)

**Compétences:** Modélisation, automatique et commande, méthodes numériques et outils logiciels associés, traitement de l'image, conception, implémentation, optimisation de systèmes ou process sous contraintes [systèmes différentiels, discrets, hybrides, avec bruit, retard, ...], diagnostic, commande optimale, observation, stabilisation de systèmes [rejet de perturbations, sensibilité, asservissements], informatique [C++ notamment], simulation, visualisation.

**Débouchés:** aéronautique, automobile, procédés, traitement du signal, imagerie, secteur mécanique, électrique, électronique, informatique, biologique, chimique, économique [banque, assurance], ou tous secteurs d'activités et départements R&D nécessitant conception / mise en œuvre / optimisation de process ou de systèmes.



### Master Première année - Semestre 1 : Tronc commun



Méthodes hilbertiennes et analyse de Fourier  
 Probabilités et statistiques  
 Equations aux Dérivées Partielles : théorie et pratique  
 Mathématiques pour la finance : théorie et pratique  
 Signal et filtrage : théorie et pratique

### Master Première année - Semestre 2

#### Parcours SRO

Statistiques  
 Statistiques descriptives et logiciels  
 Analyse de données  
 Bases de données

#### Parcours A

Optimisation  
 Modélisation, méthodes variationnelles  
 Signal et Image  
 Contrôle de systèmes

Anglais (Tronc commun)

### Master Deuxième année - Semestre 1

#### Tronc Commun

Programmation objet, C++, simulation  
 Recherche opérationnelle, graphes, programmation dynamique  
 Processus aléatoires, modélisation, et applications  
 Anglais

#### Parcours SRO

Statistiques approfondies  
 Prévisions  
 Bases de données  
 Génie logiciel  
 Algorithmes d'aide à la décision  
 Plans d'expérience  
 Mathématiques financières

#### Parcours A

Modélisation, calcul scientifique, et outils numériques  
 Automatique  
 Contrôle optimal  
 Image  
 Commande et asservissements  
 Diagnostic et observateurs



#### Enseignements assurés par des industriels partenaires

Génie logiciel (France Telecom)  
 Gestion de projets (IBM)  
 Analyse de distribution (La Poste)  
 Data Mining (IBM)  
 Sécurisation de réseaux (EDF)  
 Optimisation de réseaux (France Telecom)

Automatique et automobile (PSA)  
 Moteurs [a]synchrones (Alstom/ Areva)  
 Contrôle de procédés, pétrochimie (IFP)  
 Stabilisation de réseaux électriques ( RTE)  
 Imagerie (Thales)  
 Signaux et filtrage (IXSEA)

### Master Deuxième année - Semestre 2

Stage ingénieur en entreprise (de 4 à 6 mois).