Marches aléatoires conditionnées dans des cônes

Journée de rentrée projet Madaca

FDP Orléans-Tours

Orléans Septembre 2014

I. Système de racines

E espace euclidien de dimension finie.

Definition

Un système de racines R est un sous-ensemble fini de E tel que

1. $\mathrm{vect}(R) = E$,
2. si $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{R}$, $k\alpha \in R$ ssi $k = \pm 1$,
3. si $\alpha \in R$, R est stable par s_α la symétrie orthogonale d'hyperplan $\langle \alpha \rangle^\perp$,
4. pour toutes racines $\alpha, \beta \in R$, $\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Definition

$W = \{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$ est le groupe de Weyl associé à R.

Classification

- 4 familles infinies: les types A_n, B_n, C_n et D_n,
- 5 types exceptionnels: les types E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2.

De façon générale, il existe $S \subset R$ base de E tel que $R = R_+ \sqcup R_-$ avec

- $R_+ = \{\alpha$ somme d'éléments de S à coefs dans $\mathbb{N}_{>0}\}$,
- $R_- = -R_+$.

$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est un ensemble de racines simples de R.

Exemples

En type A_{n-1}

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{-\varepsilon_i + \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$
$$S = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}.$$

Exemple: En type C_2, $E = \mathbb{R}^2$ et

$$R = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2\} \cup \{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2, -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, -2\varepsilon_1, -2\varepsilon_2\}$$

$$S = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, 2\varepsilon_2\}.$$

Réseau des poids

On appelle $Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ le réseau des racines.
Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la base "duale" de S i.e. telle que $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$

Exemple: En type C_2, $E = \mathbb{R}^2$ et $\Omega = \{\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$.

$P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\omega_i$ est le réseau des poids.
$\overline{C} = \{x \in E \mid (x, \alpha) \geq 0, \alpha \in S\}$.
$P_+ = P \cap \overline{C}$ et $P_{++} = P \cap C$.

Exemple: En type C_2, $\overline{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2 \geq 0\}$.

II. Marches conditionnées

Soit $B \subset P$ fini et p une mesure de probabilité sur B.

On se donne une suite $(X_\ell)_{\ell \geq 1}$ de v.a. i.i.d à valeurs dans B de même loi telle que

$$\mathbb{P}(X_\ell = b) = p_b.$$

La suite $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$ avec $S_\ell = X_1 + \cdots + X_\ell$ définit une marche aléatoire dans P.

Supposons $m = \sum_{b \in B} p_b b \in C$ (intérieur de $\overline{C}$).

Questions:

1. Quelle est la loi de la marche $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$?

Questions:

1. Quelle est la loi de la marche $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$?
2. Si le nb de trajectoires à pas dans B d'extrémités fixées est facile à calculer, comment évaluer le nb de trajectoires qui restent dans $\overline{C}$?

Questions:

1. Quelle est la loi de la marche $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$?
2. Si le nb de trajectoires à pas dans B d'extrémités fixées est facile à calculer, comment évaluer le nb de trajectoires qui restent dans $\overline{C}$?
3. Quelle est la loi de la marche $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$ conditionnée à rester dans $\overline{C}$ et le lien combinatoire avec la marche initiale $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$.

Ensemble adapté

Definition

B est adapté lorsque

1. $wB = B$ pour tout $w \in W$,
2. pour tout $b \in B$ et $v \in P_{++}$, $v + b \in P_+$.

Exemples:

1. $B = R$ est adapté en type A mais pas en type C !
2. En type A, $W = S_n$ et $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est adpaté.

Principe de reflexion

Soient β, γ dans P et λ, Λ dans P_+. On pose

- $N_\ell(\beta, \gamma)$ le nb de chemins de longeur ℓ de β à γ à pas dans B,
- $N_\ell^C(\lambda, \Lambda)$ le nb de chemins de longeur ℓ de λ à Λ à pas dans B restant dans C.

Théorème (Gessel-Zeilbeger 1992): Si B est admissible

$$N_\ell^C(\lambda, \Lambda) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) N_\ell(w(\lambda + \rho), \Lambda + \rho)$$

avec $\rho = \sum_{i=1}^n \omega_i \in C$.
Preuve: coupler les chemins issus de $w(\lambda + \rho)$ et $s_\alpha w(\lambda + \rho)$ où $H_\alpha = \langle \alpha \rangle^\perp$ est la dernière paroi de $\overline{C}$ traversée.

III. Application à la marche simple

En type A, on a pour le cône

$$\overline{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\} \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

On regarde les chemins dans

$$P = \mathbb{Z}^n = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} e_i$$

d'ensemble de transitions adapté $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
$\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0) \in P_+$ est une partition et on note

$$|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

Matrice de transition de la marche simple

Soit $(X_\ell)_{\ell \geq 1}$ une suite de variables à valeurs dans $\mathcal{B}$ (i.i.d.)

$$\mathbb{P}(X_\ell = e_i) = p_i \in]0,1[\text{ pour } i = 1, \dots, n$$
$$p_1 + \cdots + p_n = 1$$

$$m := E(X_\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i.$$

$S_\ell = X_1 + \cdots + X_\ell$ définit une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^n$.
Vue comme une chaîne de Markov sa matrice de transition est

$$\Pi(\alpha, \beta) = \begin{cases} p_i \text{ si } \beta - \alpha = e_i \in \mathcal{B}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Supposons $E(X_\ell) = m \in C$.

Proposition:

- Si $\lambda \in \overline{C}$, $\mathbb{P}_\lambda(S_\ell \in \overline{C}, \forall \ell \geq 1) > 0$.

Notons $\Pi_{\overline{C}}$ la matrice de transition de $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$ conditionnée à rester dans $\overline{C}$.

Théorème : Nous avons

$$\Pi_{\overline{C}}(\lambda, \Lambda) = \Pi(\lambda, \Lambda) \frac{\psi(\Lambda)}{\psi(\lambda)}.$$

Problème: Déterminer la fonction ψ.

Supposons $E(X_\ell) = m \in C$.

Proposition:

- Si $\lambda \in \overline{C}$, $\mathbb{P}_\lambda(S_\ell \in \overline{C}, \forall \ell \geq 1) > 0$.
- La fonction $\psi : P_+ \to \mathbb{R}_{>0}$ est harmonique

$$\psi(\lambda) = \sum_{\lambda \rightsquigarrow \Lambda} \psi(\Lambda).$$

Notons $\Pi_{\overline{C}}$ la matrice de transition de $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$ conditionnée à rester dans $\overline{C}$.

Théorème : Nous avons

$$\Pi_{\overline{C}}(\lambda, \Lambda) = \Pi(\lambda, \Lambda) \frac{\psi(\Lambda)}{\psi(\lambda)}.$$

Problème: Déterminer la fonction ψ.

Mesure de probabilité centrale sur les chemins

Notation: si $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n\} \in \mathbb{Z}^n$, $p^\beta = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_n^{\beta_n}$.

Dans ce cas, si β, γ sont dans $\mathbb{Z}^n$ et tels que $|\gamma| - |\beta| = \ell$, on a

$$\mathbb{P}_\beta(S_\ell = \gamma) = N_\ell(\beta, \gamma) p^{\gamma - \beta}$$

car chaque chemin de β à γ a la même probabilié $p^{\gamma - \beta}$.

On applique le principe de réflexion

Notons ψ_ℓ la fonction définie par

$$\psi_\ell(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(S_k \in \overline{C}, k = 1, \dots, \ell).$$

Nous avons

$$\psi_\ell(\lambda) = \sum_{|\Lambda|=\ell+|\lambda|} N_\ell^C(\lambda,\Lambda) p^{\Lambda-\lambda} =$$

$$\sum_{w\in W} \varepsilon(w) \left(\sum_{|\Lambda|=\ell+|\lambda|} N_\ell(w(\lambda+\rho),\Lambda+\rho) p^{\Lambda+\rho-w(\lambda+\rho)} \right) \times p^{w(\lambda+\rho)-\lambda-\rho}$$

$$= \sum_{w\in W} \varepsilon(w) \mathbb{P}_{w(\lambda+\rho)}(S_\ell \in C) p^{w(\lambda+\rho)-\lambda-\rho}$$

Mais comme $m \in C$, on a

$$\lim_{\ell \to +\infty} \mathbb{P}_{w(\lambda+\rho)}(S_\ell \in C) = 1 \ \forall w \in W \ !$$

Théorème : Pour tout $\lambda \in P_+$,

$$\psi(\lambda) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) p^{w(\lambda+\rho)-\lambda-\rho}$$

Corollaire : Supposons $m \in C$. La loi de $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$ conditionnée à rester dans $\overline{C}$ est telle que

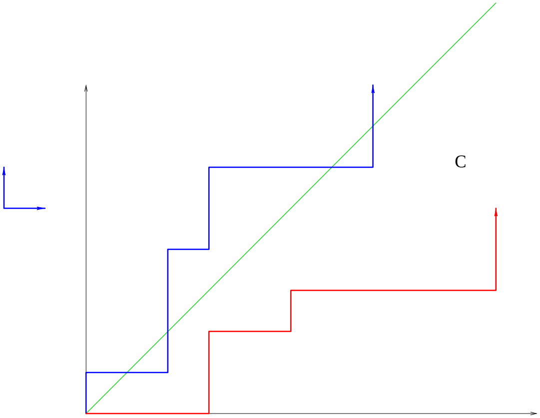
$$\begin{aligned} \Pi_{\overline{C}} &= \frac{s_\Lambda(p_1, \ldots, p_n)}{s_\lambda(p_1, \ldots, p_n)} 1_B(\Lambda - \lambda) \text{ et} \\ \psi(\lambda) &= \mathbb{P}_\lambda(\forall \ell \geq 0, S_\ell \in \overline{\mathcal{C}}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(1 - \frac{p_j}{p_i}\right) p^{-\lambda} s_\lambda(p_1, \ldots, p_n). \end{aligned}$$

où $s_\lambda \in Sym[x_1, \ldots, x_n]$ est le polynôme de Schur associé à λ.

- Chemins de longueur $\ell \longleftrightarrow$ mots $w = x_1 \cdots x_\ell$ sur $\{1, \dots, n\}$.
- Le poids de w est $\mathrm{wt}(w) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ où μ_i est le nombre de i dans w.

Lemme: w reste dans $\overline{C}$ ssi w est un mot de Yamanouchi i.e.

$\forall k, \forall i$, le nombre de i dans $x_1 \dots x_k$ est $\succeq$ à celui des $i+1$.
Exemple: $w = 112321231$ est un mot de Yamanouchi.



Un chemin (en bleu) et son image par P (en rouge) pour la representation vectorielle de sl(2,C)

$$\mathcal{P}(211222122111122) = 111221121111122$$

L'ensemble $B^{\otimes \ell}$ des mots de longueur ℓ sur $\{1, ..., n\}$ possède une structure de graphe orienté: le graphe cristallin de $V(1)^{\otimes \ell}$.

Les arrêtes sont les $\xrightarrow{i}$ "colorées" par les entiers $i = 1, ..., n-1$ et définies par un procédé combinatoire basé sur les parenthésages.

Exemple: $w = 2123213123\mathbf{2}1121$ et $i = 1$.

1. $w_1^{(0)} = 2(12)21(12)2\mathbf{1}(12)1$
2. $w_1^{(1)} = 22(12)\mathbf{1}1$
3. $w_1^{(2)} = w_1^{red} = 22\mathbf{1}1$

On a

$$21232131232\mathbf{1}121 \xrightarrow{1} 21232131232\mathbf{2}121$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, "1"] & 2 \arrow[r, "2"] & 3 \\
1 \arrow[d, "1"'] & 11 \arrow[r, "1"] & 21 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & 31 \arrow[d, "1"'] \\
2 \arrow[d, "2"'] & 12 \arrow[d, "2"'] & 22 \arrow[r, "2"] & 32 \arrow[d, "2"'] \\
3 & 13 \arrow[r, "1"] & 23 & 33
\end{tikzcd}
$$

composantes connexes $\leftrightarrow$sommets source $\leftrightarrow$ mots de Yamanouchi

Propriétés principales

- Chaque c.c. de $B^{\otimes \ell}$ contient un unique sommet source.

Propriétés principales

- Chaque c.c. de $B^{\otimes \ell}$ contient un unique sommet source.
- Les sommets source de $B^{\otimes \ell}$ sont les mots de Yamanouchi.

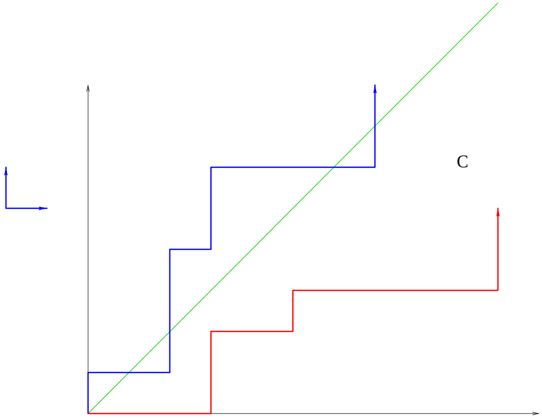
Transformée de Pitman généralisée

$\mathcal{P}$ est définie par

$$B^{\otimes \ell} \longrightarrow \overline{C}$$
$$b \longmapsto \text{source}[(\text{B}(\text{b})]$$

$\mathcal{P}$ envoie un chemin de $\mathbb{Z}^n$ sur un chemin dans $\overline{C}$.

$\mathcal{P}$ généralise la "vraie" transformée de Pitman ($n = 2$).



Un chemin (en bleu) et son image par P (en rouge) pour la representation vectorielle de sl(2,C)

$$\mathcal{P}(211222122111122) = 111221121111122$$

Supposons $n = 2$.

Soit Π la projection sur la droite $y = -x$.

Pour tout w, $\pi(w) = y_1 \cdots y_\ell$ est un un chemin sur $\mathbb{Z}$ de pas $y_i \in \{\pm 1\}$.

Posons $\pi(\mathcal{P}(w)) = z_1 \cdots z_\ell$.

On a pour tout k

$$z_k = y_\kappa - 2 \inf_{1 \leq a \leq k} y_a$$

qui est la "vraie" transformation de Pitman sur la droite.

Soit $Z_\ell = \mathcal{P}(S_\ell)$.

Théorème (O'Connell 2003): $(Z_\ell)_{\ell \geq 1}$ est une chaîne de Markov sur $\overline{C}$ avec matrice de transition

$$\Pi_Z(\mu, \lambda) = \frac{s_\lambda(p_1, \ldots, p_n)}{s_\mu(p_1, \ldots, p_n)} 1_B(\lambda - \mu).$$

Théorème (O'Connell 2003): Supposons $m \in C$. La loi de $(S_\ell)_{\ell \geq 1}$ conditionnée à rester dans $\overline{C}$ est telle que

$$\Pi_{\overline{C}} = \Pi_Z.$$

et

$$\mathbb{P}_\mu(\forall \ell \geq 0, S_\ell \in \overline{\mathcal{C}}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(1 - \frac{p_j}{p_i}\right) s_\mu(p_1, \ldots, p_n).$$

V. Généralisations et perspectives

Théorème: On peut utiliser la théorie combinatoire des représentations des algèbres de Lie pour déterminer le conditionnement de nombreuses autres marches à l'aide de la transformée de Pitman généralisée.

Exemples:

- Pour les transitions $\pm e_i$, on considère la représentation vectorielle de $\mathfrak{sp}_{2n}$ ou $\mathfrak{so}_{2n}$ (dimension $2n$).
- Pour les 8 transitions $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3$, on considère la représentation spinorielle de $\mathfrak{so}_7$.
- De façon générale pour des transitions correspondant aux poids d'une représentation mais en utilisant des processus continus (chemins de Littelmann).

Quelques perspectives

1. Traiter le cas d'une dérive sur le bord du cône.
2. Obtenir des équivalents pour le nb de chemins de longeur ℓ issus de μ et restant dans le cône.
3. Généraliser le principe de réflexion.
4. Etude spectrale des matrices de transition Π_Z.
5. Etude des fonctions harmoniques sur l'espace des trajectoires dans le cône.
6. Généraliser à des cônes qui ne soient pas des chambres de Weyl.
7. ....????